



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

✓ **IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO DOBLE.**

✓ **IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD.**



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO DOBLE

I. Identidades Fundamentales:

I.1) $\boxed{\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)}$

Demostración

Partimos de la identidad

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

Sea $x = y = \theta$

$$\sin(\theta + \theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\therefore \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Observación

$$\boxed{\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}}$$

Ejemplos

$$* \sin(80^\circ) = 2\sin(40^\circ)\cos(40^\circ)$$

$$* \sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

$$* \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$* 2\sin(5^\circ)\cos(5^\circ) = \sin(10^\circ)$$

$$* 2\sin(6x)\cos(6x) = \sin(12x)$$

PROBLEMA 1

Reduzca la expresión $\frac{\text{sen}(4x)}{(1 + \text{sen}(x) - \cos(x))(1 - \text{sen}(x) + \cos(x))}$, siendo x la medida de un ángulo no cuadrantal.

- A) $\cos(2x)$ B) $\text{sen}(2x)$ C) $\text{sen}(x)$ D) $2\text{sen}(x)$ E) $2\cos(2x)$

CLAVE E**PROBLEMA 2**

Calcule el valor de la expresión $\cos(12^\circ) \cos(24^\circ) \cos(48^\circ) \cos(96^\circ)$

- A) $-1/32$ B) $-1/16$ C) $-1/8$ D) $-1/4$ E) $-1/2$

CLAVE B

PROBLEMA 3

Determine la variación de la expresión

$$(2\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^2 + (\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

A) [2; 8]

B) [1; 9]

C) [3; 7]

D) [4; 12]

E) [5; 13]

CLAVE B**PROBLEMA 4**

Dada la expresión $L = 5(\operatorname{sen}^4(x) + \cos^2(x)) - (\cos^4(x) + \operatorname{sen}^2(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$
determine los valores de L.

A) [1; 2]

B) [2; 3]

C) [3; 4]

D) [2; 4]

E) [3; 5]

CLAVE C

Tengamos en cuenta las siguientes desigualdades

$$-\frac{1}{2} \leq \sin(\theta)\cos(\theta) \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \leq \frac{1}{4}$$

De esta manera:

$$\frac{1}{2} \leq \sin^4(\theta) + \cos^4(\theta) \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq \sin^6(\theta) + \cos^6(\theta) \leq 1$$

Además $\forall n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \sin^{2n}(\theta) + \cos^{2n}(\theta) \leq 1$$

1.2) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Ejemplos

$$* \cos(20^\circ) = \cos^2(10^\circ) - \sin^2(10^\circ)$$

$$* \cos(8x) = \cos^2(4x) - \sin^2(4x)$$

$$* \cos^2(22^\circ) - \sin^2(22^\circ) = \cos(44^\circ)$$

$$* \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Además, se demuestra que:

$$\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = \cos(2\theta)$$

$$* \cos^4(4^\circ) - \sin^4(4^\circ) = \cos(8^\circ)$$

$$* \cos^4(15^\circ) - \sin^4(15^\circ) = \cos(30^\circ)$$

Demostración

Partimos de la identidad

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Consideramos que: $x = y = \theta$

$$\cos(\theta + \theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)$$

$$\therefore \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

También:

$$\begin{aligned} \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) &= \\ &= \underbrace{[\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)]}_{\cos(2\theta)} \underbrace{[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]}_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = \cos(2\theta)$$

También, como: $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Hacemos el cambio: $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$

$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

Hacemos el cambio: $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta))$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

Ejemplos

$$\cos(20^\circ) = \begin{cases} 1 - 2\sin^2(10^\circ) \\ 2\cos^2(10^\circ) - 1 \end{cases}$$

$$\cos(4x) = \begin{cases} 1 - 2\sin^2(2x) \\ 2\cos^2(2x) - 1 \end{cases}$$

También:

$$* 1 - 2\sin^2(3x) = \cos(6x)$$

$$* 1 - 2\sin^2(13^\circ) = \cos(26^\circ)$$

$$* 2\cos^2(15^\circ) - 1 = \cos(30^\circ)$$

$$* 2\cos^2(5x) - 1 = \cos(10x)$$

PROBLEMA 5

Siendo $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{6}{31}}$; $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, calcule el valor de $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + 3\sqrt{6}\cos(2x)$

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{6}$

E) $3\sqrt{6}$

CLAVE D

PROBLEMA 6 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI 2001 - I)

Si se cumple que: $\frac{\cos^2(\frac{3x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)} = A \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + B$, calcule $A \cdot B$

A) 2

B) -2

C) 1

D) -1

E) 1/2

CLAVE B

PROBLEMA 7

Reduzca la expresión $\frac{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)}{\operatorname{sen}(x + 30^\circ)}$

- A) $\operatorname{sen}(x)$ B) $\cos(x)$ C) $2\operatorname{sen}(x)$ D) $4\cos(x)$ E) $4\operatorname{sen}(x)$

CLAVE D

PROBLEMA 8

Siendo $\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)} = \left(\frac{\cot(x) + \tan(x)}{2} \right)^3$, calcule el valor de $\cos(4x)$

- A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{7}{8}$ C) $-\frac{8}{9}$ D) $-\frac{15}{16}$ E) $-\frac{31}{32}$

CLAVE E

PROBLEMA 9

En la figura mostrada, $\cot(\omega) = 3\sqrt{3}$, calcule el valor de $\cos(4\alpha)$

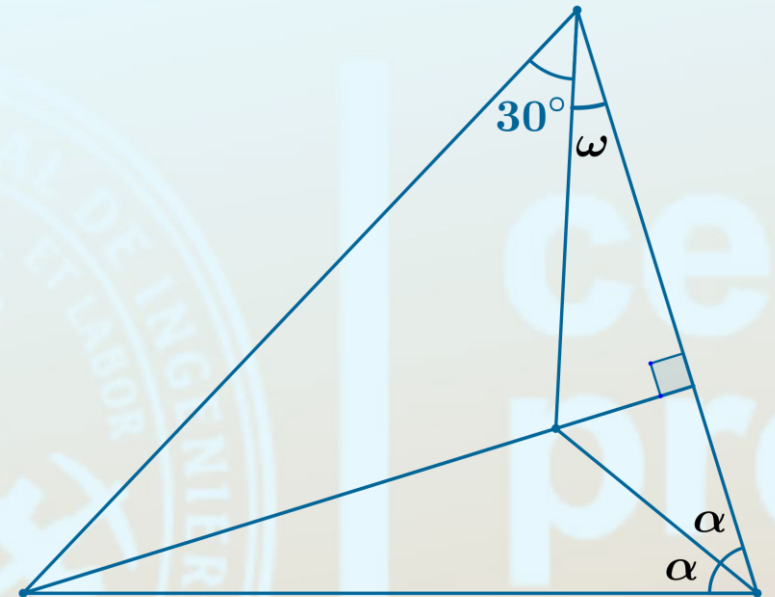
A) $-3/25$

D) $-37/49$

B) $-41/36$

E) $-41/49$

C) $-31/36$



CLAVE E

PROBLEMA 10

Reduzca la expresión

$$\left(\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\left(\cos(x) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\left(\cos(x) - \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)\left(\cos(x) - \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

A) $\frac{\cos(4x)}{8}$

B) $\frac{\text{sen}(4x)}{8}$

C) $\frac{\cos(4x)}{4}$

D) $\frac{\text{sen}(4x)}{4}$

E) $\frac{\cos(4x)}{16}$

CLAVE A

Fórmulas de degradación

Partimos de: $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) \Rightarrow 2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$

Ejemplos

$* 2\sin^2(8x) = 1 - \cos(16x)$	$* 1 - \cos(8\theta) = 2\sin^2(4\theta)$
$* 2\sin^2(23^\circ) = 1 - \cos(46^\circ)$	$* 1 - \cos(10^\circ) = 2\sin^2(5^\circ)$

También: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \Rightarrow 2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$

Ejemplos

$* 2\cos^2(20^\circ) = 1 + \cos(40^\circ)$	$* 1 + \cos(24^\circ) = 2\cos^2(12^\circ)$
$* 2\cos^2(3x) = 1 + \cos(6x)$	$* 1 + \cos(4x) = 2\cos^2(2x)$

PROBLEMA 11

Siendo $2\operatorname{sen}(t) = 1 + 3\cos(t)$, calcule el valor de $12\operatorname{sen}(2t) - 5\cos(2t)$

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

CLAVE B**PROBLEMA 12**

Siendo $\frac{1 - \cos(4t)}{1 + \cos(2t)} = \frac{8}{3}$, calcule el valor de $\frac{1 - \cos(8t)}{1 - \cos(4t)}$

A) 7/9

B) 5/9

C) 4/9

D) 2/81

E) 4/81

CLAVE C

PROBLEMA 13

Siendo $2 \cdot \cot^2(x) = 3 + 5 \cdot \tan^2(y)$, calcule el valor de $2 \cos(2y) + 5 \cos(2x)$

A) 6

B) 5

C) 4

D) 3

E) 2

CLAVE D

Otras fórmulas de degradación

Partimos de:

$$8\text{sen}^4(\theta) = 2(2\text{sen}^2(\theta))^2 = 2(1 - \cos(2\theta))^2$$

$$8\text{sen}^4(\theta) = 2 - 4\cos(2\theta) + \underbrace{2\cos^2(2\theta)} = 2 - 4\cos(2\theta) + 1 + \cos(4\theta)$$

$$\rightarrow 8\text{sen}^4(\theta) = 3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)$$

De forma similar $8\cos^4(\theta) = 3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)$

Se demuestra también:

$$\text{sen}^4(\theta) + \cos^4(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4\theta)$$

$$\text{sen}^6(\theta) + \cos^6(\theta) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4\theta)$$

PROBLEMA 14 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI)

Si m y M representan el mínimo y máximo valor de: $F(x) = \operatorname{sen}^6(x) + \cos^6(x)$

Calcule $m + M$.

- A) $5/4$ B) $3/4$ C) $1/4$ D) 1 E) $1/2$

CLAVE A**PROBLEMA 15**

Si $\cot(2x) + \tan(2x) = \frac{8}{\sqrt{7}}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{8}\right)$, calcule $\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x)$

- A) $11/16$ B) $13/16$ C) $15/16$ D) $7/8$ E) $5/8$

CLAVE C

1.3)

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

Ejemplos

$$* \tan(40^\circ) = \frac{2\tan(20^\circ)}{1 - \tan^2(20^\circ)}$$

$$* \tan(6x) = \frac{2\tan(3x)}{1 - \tan^2(3x)}$$

Además, a partir de:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = 2 \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right) \cos^2(\theta) \Rightarrow \sin(2\theta) = 2 \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right) \left(\frac{1}{\sec^2(\theta)} \right)$$

Reconociendo que: $\begin{cases} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) \\ \sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) \end{cases}$

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

Demostremos:

$$\text{Partimos de: } \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Si hacemos que: $x = y = \theta$

$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)\tan(\theta)}$$

$$\therefore \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

También:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) \left(\frac{1}{\sec^2(\theta)} \right)$$

Reconociendo que: $\begin{cases} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) \\ \sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) \end{cases}$

$$\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

Para recordar en forma práctica estas fórmulas, se puede partir de $\tan(2\theta)$:

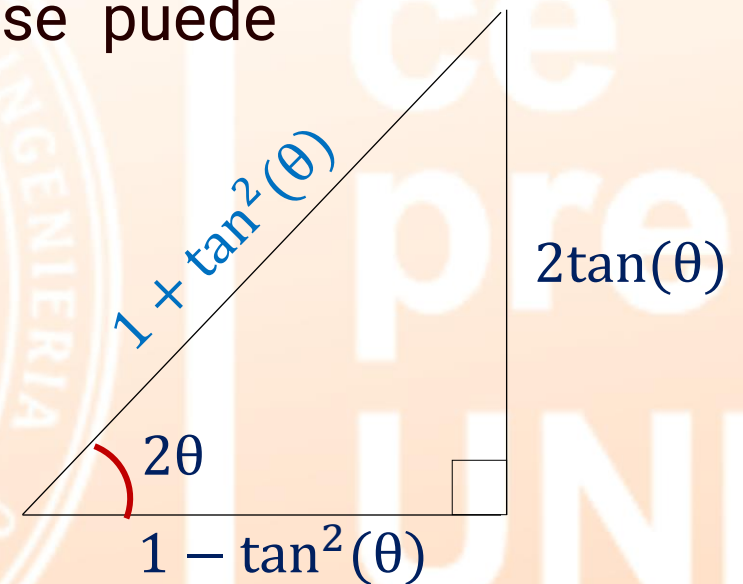
Como: $\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$

Construimos:

De donde:

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$



PROBLEMA 16 (PC 3 CEPRE UNI 2022 - II)

Si: $\tan^2(x) - 6 \tan(x) + 1 = 0$, calcule el valor de: $\cos(4x)$.

A) $1/3$

B) $2/9$

C) $2/3$

D) $5/9$

E) $7/9$

CLAVE E**PROBLEMA 17**

Se define $f(t) = \cot(t) \cos^2(t) - \tan(t) \sin^2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

para cierto valor de t_0 se verifica que $f(t_0) = 4f(2t_0)$, calcule $\sec(4t_0)$.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 7

CLAVE B

PROBLEMA 18

En la figura mostrada, $AB=BC$, el área de la región triangular DEC es el doble del área de la región triangular ABD y la $m\angle BAD = \alpha$. Calcule $\csc(2\alpha)$

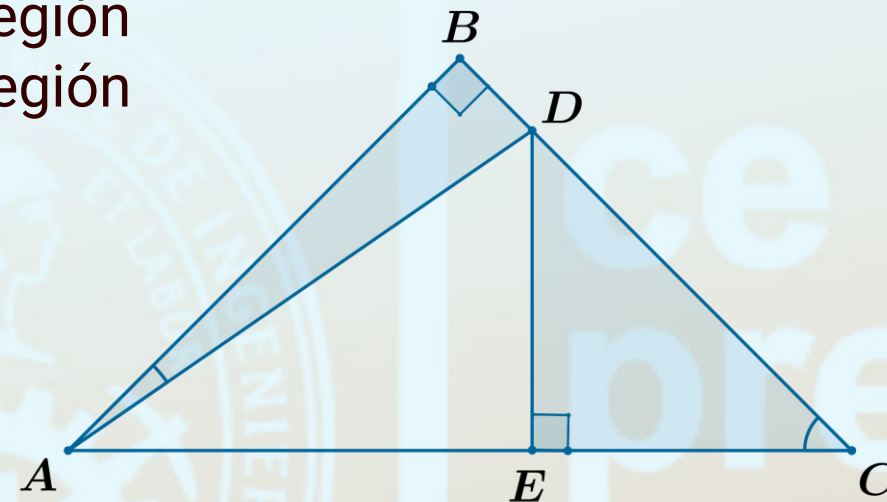
A) 2

B) 3

C) 3,5

D) 4

E) 4,5


CLAVE B

II. Identidades Auxiliares:

II.1) $(\operatorname{sen}(\theta) \pm \cos(\theta))^2 = 1 \pm \operatorname{sen}(2\theta)$

Ejemplos

$$* (\operatorname{sen}(5^\circ) + \cos(5^\circ))^2 = 1 + \operatorname{sen}(10^\circ)$$

$$* (\operatorname{sen}(3x) - \cos(3x))^2 = 1 - \operatorname{sen}(6x)$$

II.2) $\sqrt{1 \pm \operatorname{sen}(2\theta)} = |\operatorname{sen}(\theta) \pm \cos(\theta)|$

$$* \sqrt{1 + \operatorname{sen}(40^\circ)} = \underbrace{|\operatorname{sen}(20^\circ) + \cos(20^\circ)|}_{(+)} = \operatorname{sen}(20^\circ) + \cos(20^\circ)$$

$$* \sqrt{1 - \operatorname{sen}(20^\circ)} = \underbrace{|\operatorname{sen}(10^\circ) - \cos(10^\circ)|}_{(-)} = -(\operatorname{sen}(10^\circ) - \cos(10^\circ)) = \cos(10^\circ) - \operatorname{sen}(10^\circ)$$

Demostración

Partimos de:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta))^2 &= \\ 1 + \underbrace{2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}_{\operatorname{sen}(2\theta)} \end{aligned}$$

$$\therefore (\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta))^2 = 1 + \operatorname{sen}(2\theta)$$

PROBLEMA 19 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI 2016 - I)

Si $\tan(x) + \cot(x) = 5/2$ y $M = \frac{\text{sen}(45^\circ + x)}{\text{sen}(135^\circ + x)}$, calcule M^2 .

A) 2

B) 9

C) 16

D) 25

E) 36

CLAVE B**PROBLEMA 20 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI 2015 - II)**

Si para $\phi \in [0; 2\pi]$; se obtiene

$$\text{sen}(\phi) + \cos(\phi) + \text{sen}(2\phi) = (\text{sen}(\phi) + \cos(\phi) + A)^2 + B$$

entonces $(2A+4B)$ es igual a

A) - 1

B) - 2

C) - 3

D) - 4

E) - 5

CLAVE D

II.3) $\tan(\theta) + \cot(\theta) = 2\csc(2\theta)$

Ejemplos

$$* \tan(4^\circ) + \cot(4^\circ) = 2 \csc(8^\circ)$$

$$* \tan(3x) + \cot(3x) = 2 \csc(6x)$$

$$* 2 \csc(10^\circ) = \tan(5^\circ) + \cot(5^\circ)$$

II.4) $\cot(\theta) - \tan(\theta) = 2\cot(2\theta)$

Ejemplos

$$* \cot(4^\circ) - \tan(4^\circ) = 2 \cot(8^\circ)$$

$$* \cot(2x) - \tan(2x) = 2 \cot(4x)$$

$$* 2 \cot(12^\circ) = \cot(6^\circ) - \tan(6^\circ)$$

Demostración

Partimos de:

$$\tan(\theta) + \cot(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta)$$

$$\tan(\theta) + \cot(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta)} = \frac{1}{\frac{\sin(2\theta)}{2}}$$

$$\therefore \tan(\theta) + \cot(\theta) = 2\csc(2\theta)$$

$$\cot(\theta) - \tan(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} - \tan(\theta)$$

$$\cot(\theta) - \tan(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{\tan(\theta)} \quad \swarrow \cot(2\theta)$$

$$\cot(\theta) - \tan(\theta) = \frac{2(1 - \tan^2(\theta))}{2\tan(\theta)}$$

$$\therefore \cot(\theta) - \tan(\theta) = 2\cot(2\theta)$$

PROBLEMA 21 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI)

El valor de la expresión: $\cot(24^\circ) \cot(57^\circ) - \cot(24^\circ) \cot(33^\circ)$

- A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) -2 D) -1 E) 0

CLAVE C**PROBLEMA 22**

Determine el valor de k en la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{\cot(4x) + \tan(4x)}{(\cot(2x) + \tan(2x))(\cot(x) - \tan(x))} = k(\tan(4x) - \tan(2x))$$

- A) $1/4$ B) $1/2$ C) 2 D) 4 E) 6

CLAVE A

PROBLEMA 23

En la figura mostrada, el arco AB tiene su centro en O; las medidas de los ángulos AOB, FCD y CDE es 90° , además:

$$\frac{FC}{3} = \frac{CD}{4} = \frac{ED}{2} \text{ y } m\angle DEB = \theta$$

Calcule $\tan(4\theta)$.

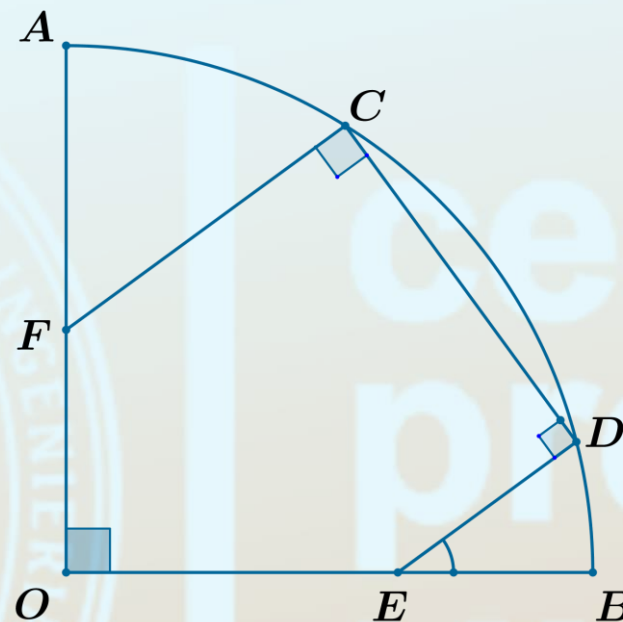
A) $-4/7$

B) $-4/9$

C) $-5/12$

D) $-8/15$

E) $-12/5$



CLAVE D

II.5) $\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = 4\csc^2(2\theta)$

II.6) $\tan(2\theta) \tan(\theta) = \sec(2\theta) - 1$

II.7) $\tan(2\theta) \cot(\theta) = \sec(2\theta) + 1$

Demostración II.5

Partimos de la identidad

$$\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = \sec^2(\theta)\csc^2(\theta)$$

$$\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = (\tan(\theta) + \cot(\theta))^2$$

$$\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = (2\csc(2\theta))^2$$

$$\therefore \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = 4\csc^2(2\theta)$$

Demostración II.6

Sea: $P = \tan(2\theta)\tan(\theta)$

$$P = \left(\frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \right) \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right)$$

$$P = \left(\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos(2\theta)} \right) \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right)$$

$$P = \frac{2\sin^2(\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{\cos(2\theta)}$$

$$\rightarrow P = \frac{1}{\cos(2\theta)} - \frac{\cos(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \sec(2\theta) - 1$$

$$\therefore \tan(2\theta)\tan(\theta) = \sec(2\theta) - 1$$

PROBLEMA 24

Calcule el valor de $\left(\sec\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1\right)\left(\sec\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1\right)\left(\sec\left(\frac{8\pi}{7}\right) + 1\right)$

A) 1

B) -1

C) 2

D) -2

E) 3

CLAVE A

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD

I. Identidades Fundamentales:

I.1)
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

Ejemplo

$$* \sin\left(\frac{397^\circ}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1 - \cos(397^\circ)}{2}}$$

$$* \sin\left(\frac{217^\circ}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 - \cos(217^\circ)}{2}}$$

El signo dependerá de la ubicación del lado final de $\theta/2$ y el signo de $\sin(\theta/2)$

Demostración

Por identidad del arco doble

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\Rightarrow |\sin(x)| = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}$$

Cambiamos x por $\theta/2$

$$\therefore \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

1.2) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$

Ejemplos

$$* \cos\left(\frac{175^\circ}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 + \cos(175^\circ)}{2}}$$

$$* \cos\left(\frac{233^\circ}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1 + \cos(233^\circ)}{2}}$$

El signo dependerá de la ubicación del lado final de $\theta/2$ y el signo de $\cos(\theta/2)$

Demostración

Por identidad del arco doble

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$\Rightarrow |\cos(x)| = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}}$$

Cambiamos x por $\theta/2$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$$

1.3) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}}$

Ejemplos

$$* \tan\left(\frac{235^\circ}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1 - \cos(235^\circ)}{1 + \cos(235^\circ)}}$$

$$* \tan\left(\frac{123^\circ}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 - \cos(123^\circ)}{1 + \cos(123^\circ)}}$$

El signo dependerá de la ubicación del lado final de $\theta/2$ y el signo de $\tan(\theta/2)$

Demostración

Se conoce que

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$$

Dividiendo:

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}}$$

PROBLEMA 25

Si $\cos(\theta) = -0,3$ y $180^\circ < \theta < 270^\circ$. Calcule $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

A) $-\sqrt{\frac{13}{20}}$

B) $\sqrt{\frac{13}{20}}$

C) $-\sqrt{\frac{7}{20}}$

D) $\sqrt{\frac{7}{20}}$

E) $\sqrt{\frac{7}{13}}$

CLAVE B**PROBLEMA 26**

Si $\cos(\theta) = 0,4$ y $270^\circ < \theta < 360^\circ$. Calcule $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

A) $-\sqrt{0,9}$

B) $-\sqrt{0,8}$

C) $-\sqrt{0,7}$

D) $-\sqrt{0,6}$

E) $-\sqrt{0,5}$

CLAVE C

PROBLEMA 27

Si $\csc(\theta) = -3/\sqrt{5}$ y $270^\circ < \theta < 360^\circ$. Calcule $\tan(\frac{\theta}{2})$

A) $-\sqrt{0,1}$

B) $-\sqrt{0,2}$

C) $-\sqrt{0,3}$

D) $-\sqrt{0,4}$

E) $-\sqrt{0,5}$

CLAVE B

PROBLEMA 28

Reduzca la expresión $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(16)}}$

A) $\cos(4)$

B) $\sen(4)$

C) $-\cos(4)$

D) $-\sen(2)$

E) $-\sen(4)$

CLAVE C

II. Identidades Auxiliares:

II.1) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc(\theta) - \cot(\theta)$

Ejemplos

$$* \tan\left(\frac{5x}{2}\right) = \csc(5x) - \cot(5x)$$

$$* \tan(12^\circ) = \csc(24^\circ) - \cot(24^\circ)$$

$$* \tan(15^\circ) = \csc(30^\circ) - \cot(30^\circ)$$

$$\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$$

$$* \csc(40^\circ) - \cot(40^\circ) = \tan(20^\circ)$$

$$* \csc(6x) - \cot(6x) = \tan(3x)$$

II.2) $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc(\theta) + \cot(\theta)$

Ejemplos

$$* \cot\left(\frac{3x}{2}\right) = \csc(3x) + \cot(3x)$$

$$* \cot(13^\circ) = \csc(26^\circ) + \cot(26^\circ)$$

$$* \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1$$

$$* \csc(4x) + \cot(4x) = \cot(2x)$$

$$* \csc(12^\circ) + \cot(12^\circ) = \cot(6^\circ)$$

Demostración

Partimos de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc(\theta) - \cot(\theta)$$

Además: $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\csc(\theta) - \cot(\theta)}$

$$\therefore \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc(\theta) + \cot(\theta)$$

II.3) $\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$

Ejemplo

$$* \frac{1 - \cos(4x)}{1 + \cos(4x)} = \tan^2(2x)$$

PROBLEMA 29

Reduzca la expresión
$$\frac{7 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 5 \cot\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cot(x)}{9 \cot\left(\frac{x}{2}\right) - 7 \tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \csc(x)}$$

A) $\frac{2}{3} \sec(x)$

B) $\frac{3}{4} \sec(x)$

C) $\frac{4}{5} \sec(x)$

D) $\frac{5}{6} \sec(x)$

E) $\frac{6}{7} \sec(x)$

CLAVE B

PROBLEMA 30

Calcule la medida del ángulo agudo t , el cual se verifica que

$$2 \tan(t) = \csc(20^\circ) + \csc(40^\circ) + \csc(80^\circ)$$

A) 10°

B) 20°

C) 50°

D) 70°

E) 80°

CLAVE D

PROBLEMA 31 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI 2013 - I)

Si $\sec(x) = \csc(2\theta) - \cot(2\theta)$ determine $E = \frac{\sec^2(\theta) - \tan^2(x)}{2 - \cot(\theta) + \cos(x)}$

A) -1 B) 0 C) $1/2$ D) 1 E) $3/2$ **CLAVE D****PROBLEMA 32**

Calcule el valor de la expresión $\tan(35^\circ) + \cot(70^\circ) - \sqrt{3}\sec(70^\circ)$

A) -4 B) -2 C) 2 D) 4 E) 6 **CLAVE A**

PROBLEMA 33

En la figura mostrada, $EB=2(AE)$, la $m\angle BAC = \alpha$ y la $m\angle ACE = 11^\circ 15'$.
Calcule el valor de $5 \csc(2\alpha) - \cot(2\alpha) - 1$

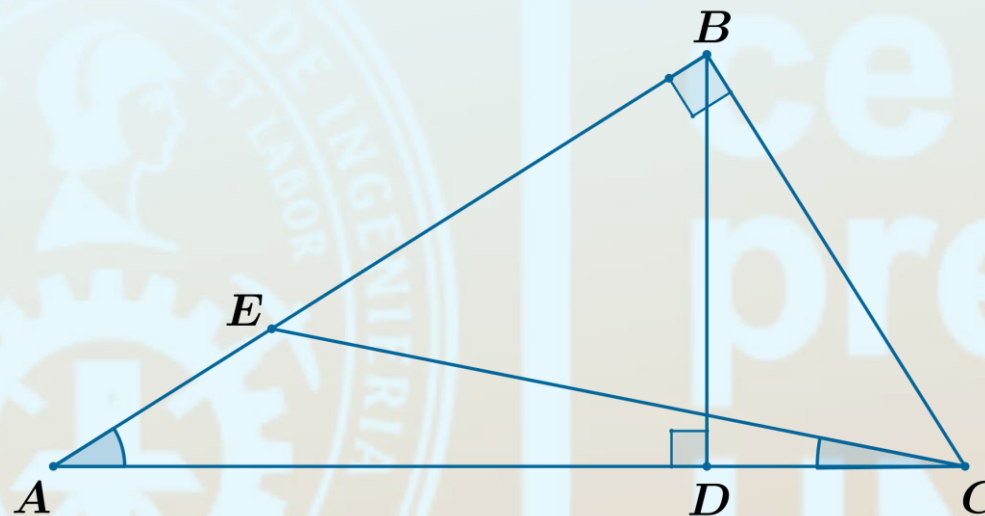
A) $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

B) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

C) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

D) $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

E) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$



CLAVE C